جامعة البعث | معادلات تفاضلية /2/ | اسم الطالب:

كلية العلوم – قسم الرياضيات | الفصل الأول للعام الدراسي 2015-2016

* السؤال الأول : (20درجة)

بإجراء التغيير المناسب على المتحول المستقل حول المعادلة التفاضلية الآتية

$$y'' + \tan x . y' + \cos^2 x . y = 0$$

إلى معادلة ذات معاملات ثابتة ثمّ أوجد الحل العام لها .

* السؤال الثاني : (16درجة)

باستخدام علاقة ليوفيل- أوسوغرادسكي أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$y'' + y' + e^{-2x} y = 0$$

إذا علمت أن $y_1 = \cos(e^{-x})$ هوحل خاص لها .

* السؤال الثالث : (29درجة)

أوجد الحل العام للمعادلة $4xy'' + 2y' + y = 1$

إذا علمت أن $y_1 = \sin\sqrt{x}$ هو حل خاص للمعادلة المتجانسة المناظرة .

* السؤال الرابع : (14+6+12+3=35درجة)

لتكن لدينا المعادلة $y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = e^{-x} + \cos x$

المطلوب : 1"- أوجد الحل العام للمتجانسة المناظرة .

2"- اقترح حلاً" خاصاً" بطريقة المعاملات غير المعينة دون تعيينها .

3"- أوجد حلاً" خاصاً" باستخدام طريقة المؤثر التفاضلي العكسي .

4"- ماهو الحل العام للمعادلة المعطاة .

****

الإجابات النمونجية مع سلم درجات أسئلة المعادلات التفاضلية /2/

الفصل الأول 2015-2016

جواب السؤال الأول : 20درجة

4 $w=\int\sqrt{\cos^2 x}\,dx=\int\cos x\,dx=\sin x \Rightarrow \frac{dw}{dx}=\cos x \Rightarrow \frac{d^2w}{dx^2}=-\sin x$

4 وبما أنّ $0=\dfrac{-\sin x+\frac{\sin x}{\cos x}.\cos x}{(\cos x)^2}=\dfrac{\frac{d^2w}{dx^2}+p(x).\frac{dw}{dx}}{(\frac{dw}{dx})^2}$ فأنّ المعادلة

المعطاة ترد من خلال الفرض $w=\sin x$ إلى معادلة من الشكل

2 $\frac{d^2y}{dw^2}+k\frac{dy}{dw}+y=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{d^2y}{dw^2}+y=0$

وهي معادلةخطية ذات معاملات ثابتة المعادلة المميزة لها هي $m^2+1=0$ 2

جذورها هي $m_1=-i$, $m_2=i$ وبالتالي فأنّ الحل العام لها هو 2

ومنه الحل العام للمعادلة المعطاة هو $y=a_1\cos(\sin x)+a_2\sin(\sin x)$ 6

جواب السؤال الثاني : 16درجة

$$y_h=y_1\left[\int\frac{c_1e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx+c_2\right]=\cos(e^{-x})\left[\int\frac{c_1e^{-\int dx}}{\cos^2(e^{-x})}dx+c_2\right]$$

4 4

$$=\cos(e^{-x})\left[\int\frac{c_1e^{-x}}{\cos^2(e^{-x})}dx+c_2\right]=\cos(e^{-x})\left[-c_1.\tan(e^{-x})+c_2\right]$$

3 3

2 $=c_0\sin(e^{-x})+c_2\cos(e^{-x})$



٢/

جواب السؤال الثالث:29درجة

المعادلة المتجانسة المناظرة هي $4x.y''+2y'+y=0$

الحل العام لها هو

$$y_h = \sin(\sqrt{x})\left[\int \frac{c_1 e^{-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}}}{\sin^2(\sqrt{x})}dx + c_2\right] = \sin(\sqrt{x})\left[\int \frac{c_1 e^{\ln(\frac{1}{\sqrt{x}})}}{\sin^2(\sqrt{x})}dx + c_2\right]$$

3 3

$$= \sin(\sqrt{x})\left[\int \frac{c_1 dx}{\sqrt{x}.\sin^2(\sqrt{x})} + c_2\right] = \sin(\sqrt{x})\left[-2c_1 \cot\sqrt{x} + c_2\right]$$

2 4

ومنه 2 $y_h = c_0 \cos(\sqrt{x}) + c_2 \sin(\sqrt{x})$

الحل العام يعطى $y = y_h + y_p$ حيث 1+1 $y_p = y_1\int\frac{w_1}{w}dx + y_2\int\frac{w_2}{w}dx$

2+2+2 $w(\cos\sqrt{x}, \sin\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, w_1 = -\frac{1}{4x}\sin\sqrt{x}, w_2 = \frac{1}{4x}\cos\sqrt{x}$

1 $y_p = \cos\sqrt{x}\int -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,dx + \sin\sqrt{x}\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,dx$

أي أنّ 3 $y_p = \cos\sqrt{x}.\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}.\sin\sqrt{x} = 1$

ومنه فإنّ الحل العام هو 3 $y = c_0\cos\sqrt{x} + c_2\sin\sqrt{x} + 1$

جواب السؤال الرابع :14+6+12+3=35درجة

1"- المعادلة المتجانسة المناظرةهي $y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$

(14)



٤/١

1 المعادلة المميزة هي $m^4+4m^3+10m^2+12m+5=0$

1+1+1 نفرض أنّ $m=k-1 \Rightarrow m^2=k^2-2k+1 \Rightarrow m^3=k^3-3k^2+3k-1$

1 و $m^4=k^4-4k^3+6k^2-4k+1$

1 نعوض في المعادلة المميزة فنحصل على $k^4+4k^2=0$ وجذور هذه

2 المعادلة هي $k_1=k_2=0 \wedge k_3=2i\ ,\ k_4=-2i$

3 أي أنّ جذور المعادلة المميزة هي $m_1=m_2=-1 \wedge m_3-1+2i\ ,\ m_4=-1-2i$

ومنه فإنّ الحل العام للمعادلة التجانسة هو

3 $$y_h=e^{-x}(A_1+A_2x)+e^{-x}(A_3\cos 2x+A_4\sin 2x)$$

(6) "2- بما أن $f(x)=e^{-x}+\cos x$ فعندئذ يكون الحل الخاص المقترح وفق

2 القاعدة الأساسية هو $y_p=B_1e^{-x}+B_2\cos x+B_3.\sin x$

4 لكن نلاحظ أنّ هناك اشتراك بين هذا الحل الخاص المقترح وبين y_h نزيل هذا الإشتراك بأن نضرب الجزء المشترك من الحل الخاص بأقل قوة ل تزيل هذا الإشتراك فيكون الحل الخاص المقترح من الشكل $y_p=B_1x^2e^{-x}+B_2\cos x+B_3\sin x$

(12) "3- نؤثر على طرفي المعادلة المعطاة بالمؤثر التفاضلي العكسي

1 $$\frac{1}{D^4+4D^3+10D^2+12D+5}$$

فنحصل على

1+1 $$y_p=\frac{1}{D^4+4D^3+10D^2+12D+5}e^{-x}+\frac{1}{D^4+4D^3+10D^2+12D+5}\cos x$$

2+2 $$y_p=\frac{x^2e^{-x}}{(12D^2+24D+20)_{D=-1}}+\frac{1}{8D-4}\cos x$$



05

2 3

$$y_p = \frac{x^2 e^{-x}}{8} + \frac{1}{10}(\sin x - \frac{1}{2}\cos x)$$

1

4"- ومنه فانّ الحل العام يكون $y = y_h + y_p$

2 $$y = e^{-x}(A_1 + A_2 x) + e^{-x}(A_3 \cos 2x + A_4 \sin 2x) + \frac{x^2 e^{-x}}{8} + \frac{\sin x}{10} - \frac{\cos x}{20}$$ (3)

****

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

~//

جامعة البعث　　　　معادلات تفاضلية /2/　　　　اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات　　　　الدورة الصيفية للعام الدراسي 2014-2015

السؤال الأول : (35درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2e^x$

المطلوب :

1" _ ايجاد الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة باستخدام طرق التفتيش فقط .

2" _ ايجاد حلاً" خاصاً" للمعادلة المعطاة ومن ثمّ كتابة الحل العام لهذه المعادلة .

السؤال الثاني : (35درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $y''-\frac{3}{x}y'+\frac{3}{x^2}y=2x-1$

المطلوب :

1" – حول المعادلة السابقة إلى معادلة ذات معاملات ثابتة

2" – أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة الناتجة

3" – اقترح حلاً" خاصاً"للمعادلة الناتجة وفق طريقة المعاملات غير المعينة دون تعيين هذه المعاملات

4"- أوجد حلاً" خاصاً" بطريقة المؤثر التفاضلي العكسي للمعادلة الناتجة

5"- ماهو الحل العام للمعادلة المعطاة .

السؤال الثالث : (30درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $y''+2\tan x.y'+(1+2\tan^2 x)y=\cos^2 x$

المطلوب : 1"- أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة الناظرة وفق علاقة ليوفيل-أوستوغرادسكي إذا علمت أنّ $y_1=\cos x$ حلاً" خاصاً" لها .

2"- أوجد الحل العام للمعادلة المعطاة .

****

مدرس المقرر
د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الأول

لدينا من المعادلة المعطاة $p_2(x)=x-1\ ,p_1(x)=-x\ \ ,p_0(x)=1$

تكون الدالة $y_1=x$ حلا" خاصا" للمعادلة المتجانسة المناظرة إذا وفقط إذا كان

$p_1(x)+x.p_0(x)=0$ وبما أنّ $-x+x.1=0$ إذا" الدالة $y_1=x$ هي حل خاص للمعادلة المتجانسة المناظرة .

تكون الدالة $y_2=x^2$ حل خاص للمعادلة المتجانسة المناظرة إذا وفقط إذا كان

$$\frac{2!}{0!}p_2(x)+\frac{2!}{1!}xp_1(x)+\frac{2!}{2!}x^2p_0(x)=0$$ وبما أنّ

$$2(x-1)-2x^2+x^2=-x^2+2x-2\neq 0$$

إذا" الدالة $y_2=x^2$ ليست حلا" خاصا" للمعادلة المتجانسة المناظرة .

تكون الدالة $y_2=e^{mx}$ حلا" خاصا" للمعادلة المتجانسة المناظرة إذا وفقط إذا كان

$(x-1)m^2-xm+1=0$ أي إذاكان $xm^2-xm-m^2+1=0$

$$xm(m-1)-(m-1).(m+1)=0\Rightarrow(m-1)\left[xm-m-1\right]=0$$

ومنه إما $m=\frac{1}{x-1}\ \Leftarrow\ xm-m-1=0$ وهذه القيمة مرفوضة وإما

$m=1 \Leftarrow m-1=0$ أي أنّ الدالة $y_2=e^x$ تكون حلا" خاصا" للمعادلة المتجانسة المناظرة وبما أن $w(x,e^x)=(x-1)e^x\neq 0$

فإنّ الحلان مستقلان خطيا" ومنه الحل العام للمتجانسة المناظرة يعطى بالعلاقة

$y_h=A_1x+A_2e^x$ حيث A_1,A_2 ثابتان كيفيان أما الحل العام للمعادلة المعطاة

فيعطى بالعلاقة $y = y_h + y_p$ وحيث y_p هو حل خاص للمعادلة المعطاة

ويعطى بالعلاقة $y_p = y_1\int \frac{w_1}{w}dx + y_2\int \frac{w_2}{w}dx$ لنوجد الآن كلاً" من w_1, w_2

$w_2 = x(x-1)e^x$, $w_1 = -(x-1)e^{2x}$ وبتعويض هاتين القيمتين وقيمة W

في العلاقة التي تعطي الحل الخاص نجد أن

$$y_p = x\int \frac{-(x-1)e^{2x}}{(x-1)e^x}dx + e^x\int \frac{x(x-1)e^x}{(x-1)e^x}dx =$$

$$y_p = -x\int e^x dx + e^x\int x dx = -xe^x + \frac{x^2}{2}e^x$$

ومنه فإن الحل العام هو $y = A_1x + A_2e^x - xe^x + \frac{x^2}{2}e^x$

جواب السؤال الثاني

المعادلة المعطاة تكتب بالشكل الآتي $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^3 - x^2$

نفرض $x = e^t \Leftarrow dx = e^t dt$ وبالتالي فإن $xy' = D_t y$ و

$x^2y'' = D_t(D_t - 1)y$ نعوض في المعادلة السابقة فنجد أن

$$D_t(D_t - 1)y - 3D_t y + y = 2e^{3t} - e^{2t}$$

أي أن $[D_t^2 - 4D_t + 3]y = 2e^{3t} - e^{2t}$

وكما نلاحظ أن هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة

المعادلة المتجانسة المناظرة هي $D_t^2 y - 4D_t y + 3y = 0$

المعدلة المميزة هي $m^2 - 4m + 3 = 0$ جذرا هذه المعادلة هما

$(m-1)(m-3) = 0$

$m_1 = 1 \quad m_2 = 3$

$e^t \quad e^{3t}$

٥/١١

$m_1 = 1, m_2 = 3$ وبالتالي فإنّ الحل العام للمتجانسة المناظرة هو

$$y_h = A_1 e^{t} + A_2 e^{3t}$$

الحل الخاص المقترح وفق القاعدة الأساسية هو $y_p = B_1 e^{3t} + B_2 e^{2t}$

نلاحظ أنّ هناك اشتراك بين y_p , y_h لذلك نضرب الجزء المشترك من y_p

بأقل قوة ل t لنزيل هذا الإشتراك فيصبح شكل الحل الخاص بعد التعديل هو

$$y_p = B_1 t e^{3t} + B_2 e^{2t}$$

نؤثر عل طرفي المعادلة التي حصلنا عليها بالمؤثر التفاضلي العكسي

$$y_p = \frac{1}{D_t^2 - 4D_t + 3}(2e^{3t} - e^{2t}) = 2\frac{1}{D_t^2 - 4D_t + 3}e^{3t} - \frac{1}{D_t^2 - 4D_t + 3}e^{2t}$$

$$y_p = 2\frac{1}{(2D_t - 4)_{D=3}} t e^{3t} - \frac{1}{4-8+3}e^{2t} = te^{3t} + e^{2t}$$

الحل العام للمعادلة هو $y = y_h + y_p = A_1 e^{t} + A_2 e^{3t} + t e^{3t} + e^{2t}$

وبالتالي الحل العام للمعادلة المعطاة هو $y = A_1 x + A_2 x^3 + x^2 + x^3 \ln x$

جواب السؤال الثالث :

الحل العام للمتجانسة المناظرة يعطى بالعلاقة $y_h = y_1\left[\int \frac{c_1 e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx + c_2\right]$

$$y_h = \cos x\left[\int \frac{c_1 e^{-\int 2\tan x dx}}{\cos^2 x} dx + c_2\right] = \cos x\left[\int \frac{c_1 e^{\ln(\cos x)^2}}{(\cos x)^2} dx + c_2\right]$$

$$y_h=\cos x\left[\int c_1 dx+c_2\right]=c_1 x.\cos x+c_2.\cos x$$

$W(x.\cos x,\cos x)=-\cos^2 x$ و $W_1=-\cos^3 x$, $W_2=x\cos^3 x$ ومنه

$$y_p=x.\cos x\int\frac{W_1}{W}dx+\cos x\int\frac{W_2}{W}dx=x.\cos x\int\cos x dx+\cos x\int -x\cos x dx$$

$$y_p=x.\cos x.\sin x-\cos x(x\sin x+\cos x)=-\cos^2 x$$

ومنه فإنّ الحل العام للمعادلة المعطاة هو $y=y_h+y_p$ أي أنّ

$$y=A_1 x\cos x+A_2\cos x-\cos^2 x$$

****

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

اتسم الطالب :

معادلات تفاضلية /٢/

جامعة البعث

الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٤-٢٠١٥

كلية العلوم – قسم الرياضيات

السؤال الأول : (٣٥درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية

$$(4x^2-1)y''+4xy'-y=\sqrt{4x^2-1}$$

والمطلوب :"١"- الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة وذلك بالإعتماد على علاقة ليوفيل – أوستوغرادسكي إذا علمت أن $y_1=\sqrt{2x+1}$ حلا" خاصا" لها .

"٢"- إيجاد حل خاص للمعادلة المعطاة ومن ثم إيجاد الحل العام لها .

السؤال الثاني : (٣٥درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية

$$y^{(4)}-2y'''+2y''-2y'+y=e^x+4\cos x$$

والمطلوب : "١" – أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة .

"٢" _ أقترح حلا" خاصا" بطريقة المعاملات غير المعينة دون تعيين المعاملات.

"٣" _ أوجد الحل الخاص بطريقة المؤثر التفاضلي العكسي ومن ثم اكتب صيغة الحل العام .

السؤال الثالث : (٣٠درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية

$$(\sin x.\cos x)y''-y'+(4\sin^2 x.\tan x)y=-4\sin 2x.\tan^2 x.\ln\cos x$$

والمطلوب : "١" _ بإجراء التغيير المناسب على المتحول المستقل حول المعادلة المعطاة إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة

"٢" _ أوجد الحل العام للمعادلة الناتجة ثم أوجد الحل العام للمعادلة المعطاة .

****

الإجابات النموذجية

السؤال الأول : ١٥+٢٠=٣٥درجة

المعادلة المعطاة تكتب بالشكل النموذجي كالآتي

$$y''+\frac{4x}{4x^2-1}y'-\frac{1}{4x^2-1}y=\frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}$$

المعادلة المتجانسة المناظرة هي

$$y''+\frac{4x}{4x^2-1}y'-\frac{1}{4x^2-1}y=0$$ 1

الحل العام لها هو

$$y_h=y_1\left[\int\frac{c_1e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx+c_2\right]=\sqrt{2x+1}\left[\int\frac{c_1e^{-\int\frac{4x}{4x^2-1}dx}}{(2x+1)}dx+c_2\right]$$ 1+1

$$y_h=\sqrt{2x+1}\left[\int\frac{c_1e^{-\ln\sqrt{4x^2-1}}}{(2x+1)}dx+c_2\right]=\sqrt{2x+1}\left[\int\frac{c_1dx}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2x-1}}+c_2\right]$$ 2+2

نفرض $2x+1=t^2 \Leftarrow dx=tdt \wedge 2x-1=t^2-2$ بالتعويض 1+1+1

نجد

$$y_h=\sqrt{2x+1}\left[c_1\int\frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-2}}+c_2\right]=\sqrt{2x+1}\left[c_1\frac{\sqrt{t^2-2}}{2t}+c_2\right]$$ 1+2

أي أنّ

$$y_h=\sqrt{2x+1}\left[c_0\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}}+c_2\right]=c_0\sqrt{2x-1}+c_2\sqrt{2x+1}$$ 1+1

$$W(\sqrt{2x-1},\sqrt{2x+1})=-\frac{2}{\sqrt{4x^2-1}} \quad و \quad W_1=-\frac{1}{\sqrt{2x-1}} \quad و \quad W_2=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$ 2+2+2

وبالتالي فإنّ

$$y_p=y_1\int\frac{W_1}{W}dx+y_2\int\frac{W_2}{W}dx=\sqrt{2x-1}\int\frac{\sqrt{2x+1}}{2}dx+\sqrt{2x+1}\int\frac{\sqrt{2x-1}}{-2}dx$$ 2+2

ومنه فإنّ

$$y_p=\frac{1}{6}\sqrt{2x-1}.(2x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}\sqrt{2x+1}.(2x-1)^{\frac{3}{2}}$$ 2+2

2 $y = y_h + y_p$ وبما أنّ $y_p = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{6}(2x+1-2x+1) = \frac{1}{3}\sqrt{4x^2-1}$ أي أنّ 2

فانّ $y = c_0\sqrt{2x-1} + c_2\sqrt{2x+1} + \frac{1}{3}\sqrt{4x^2-1}$ هوالحل العام . 2

جواب السؤال الثاني : ١٢+٨+١٥=٣٥درجة

المعادلة المتجانسة المناظرة هي $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + 1 = 0$ 1

المعادلة المميزة هي $m^4 - 2m^3 + 2m^2 - 2m + 1 = 0$ 1

واضح بأنّ $m = 1$ هو جذر للمعادلة لذلك فانّ المعادلة المميزة تكتب بالشكل

$\Leftarrow (m-1).(m-1).(m^2+1) = 0$ $(m-1).(m^3 - m^2 + m - 1) = 0$ أي أنّ 1+1

2+2+2 $m_1 = m_2 = 1 \wedge m_3 = i \wedge m_4 = -i$

ومنه فانّ $y_h = e^x(A_1 + A_2x) + A_3\cos x + A_4\sin x$ 2

ثانياً- الحل الخاص المقترح وفق القاعدة الأساسية هو

2 $y_p = B_1e^x + B_2\cos x + B_3\sin x$

نلاحظ أنّ هناك اشتراك مع الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة لذلك علينا تعديل هذا الحل بأن نضرب الدالة الأسية ب x^2 ونضرب الدوال المثلثية ب x

فيصبح الحل الخاص المقترح من الشكل

2+2+2 $y_p = B_1x^2e^x + B_2x\cos x + B_3x\sin x$

ثالثاً- المعادلة المعطاة تكتب بالشكل $(D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1)y = e^x + 4\cos x$ 1

نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1}$ 1

١+١ فنجد أنّ $y_p = \frac{1}{D^4-2D^3+2D^2-2D+1}e^x + 4\frac{1}{D^4-2D^3+2D^2-2D+1}\cos x$

وبما أنّ الواحد جذر مضاعف ل $D^4-2D^3+2D^2-2D+1=0$ فإنّ

3 $$\frac{1}{D^4-2D^3+2D^2-2D+1}e^x = \frac{x^2e^x}{12D^2-12D+4}\Big|_{D=1} = \frac{x^2e^x}{4}$$

3 $$\frac{1}{D^4-2D^3+2D^2-2D+1}\cos x = \operatorname{Re}\frac{1}{D^4-2D^3+2D^2-2D+1}e^{ix}$$

$$= \operatorname{Re}\frac{xe^{ix}}{4D^3-6D^2+4D-2}\Big|_{D=i} = \operatorname{Re}\frac{xe^{ix}}{-4i+6+4i-2} = \frac{x.\cos x}{4}$$

1 أي أنّ $$y_p = \frac{x^2e^x}{4} + x\cos x$$

2 ومنه فأنّ الحل العام هو $y = y_h + y_p$ أي أنّ

2 $$y = e^x(A_1 + A_2x) + A_3\cos x + A_4\sin x + \frac{x^2e^x}{4} + x\cos x$$

جواب السؤال الثالث : ١٢+٨+٨+٢+٢=٣٠درجة

المعادلة المعطاة هي

$$\sin x.\cos x.y'' - y' + 4(\sin^2 x.\tan x)y = -2\sin 2x.\tan^2 x.(\ln\cos^2 x)$$

2 هذه المعادلة تكتب بالشكل $y'' - \frac{2}{\sin 2x}y' + 4(\tan^2 x).y = -4\tan^2 x.\ln\cos^2 x$

2+1 بأخذ $w = \int\sqrt{4\tan^2 x}\,dx = 2\int\tan x\,dx = -2\ln\cos x$

1+1 وبما أنّ $\frac{dw}{dx} = 2\tan x \Rightarrow \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{2}{\cos^2 x}$

-٥١١

2 $$\frac{\frac{d^2w}{dx^2}+p(x)\frac{dw}{dx}}{(\frac{dw}{dx})^2}=\frac{\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin x.\cos x}.2\frac{\sin x}{\cos x}}{(2\tan x)^2}=0$$

وحيث أن 1

1 $$\frac{d^2y}{dw^2}+y=w$$

فإنّ المعادلة المعطاة تأخذ الشكل الآتي

1 $$m^2+1=0$$

المعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة المناظرة هي

2+1 $$m_1=i \quad \wedge \quad m_2=-i$$

جذرا هذه المعادلة هما

2 $$y_h=A_1\cos w+A_2\sin w$$

وبالتالي فإنّ

8 $$y_p=\frac{1}{1+D^2}w=(1+D^2)w=w$$

أما الحل الخاص فيكون

2 $$y=y_h+y_p=A_1\cos w+A_2\sin w+w$$

أي أن الحل العام هو

وبالتالي فأنّ الحل العام للمعادلة المعطاة هو

2 $$y=A_1\cos(\ln\cos^2 x)+A_2\sin(\ln\cos^2 x)-2\ln\cos x$$

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

جامعة البعث

معادلات تفاضلية /2/ اسم الطالب :

قسم الرياضيات السنة الثانية الفصل الأول للعام الدراسي 2014-2015

السؤال الأول : (30درجة)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x+1)^2 y''' - 12y' = 0$$

السؤال الثاني : (30درجة)

باستخدام علاقة ليوفيل – أوستروغرادسكي أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + (\tan x - 2\cot x)y' + (2\cot^2 x).y = 0$$

إذا علمت أن $y_1 = \sin x$ حل خاص لها .

السؤال الثالث : (40درجة)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2(1-\ln x)y'' + xy' - y = \frac{(1-\ln x)^2}{x}$$

=================

انتهت الأسئلة

أجمل الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

٣٠/ ٢/ ٢٠١٥

جامعة البعث　　　　معادلات تفاضلية /2/　　　　اسم الطالب :

قسم الرياضيات　　　　السنة الثانية　　　　الفصل الأول للعام الدراسي 2014-2015

السؤال الأول : (30درجة)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x+1)^2 y''' - 12y' = 0$$

السؤال الثاني : (30درجة)

باستخدام علاقة ليوفيل – أوستروغرادسكي أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + (\tan x - 2\cot x)y' + (2\cot^2 x).y = 0$$

إذا علمت أنّ $y_1 = \sin x$ حل خاص لها .

السؤال الثالث : (40درجة)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2(1-\ln x)y'' + xy' - y = \frac{(1-\ln x)^2}{x}$$

=================

انتهت الأسئلة

أجمل الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

٣٠/٢/٢٠١٥

جواب السؤال الأول : المعادلة المعطاة هي $(x+1)^2 y'' - 12y' = 0$

(٣٠ درجة)

نفرض أن $y' = v$ عندئذ $y'' = v' \Rightarrow y''' = v''$ (١+١+١)

1 نعوض في المعادلة فنجد $(x+1)^2 v'' - 12v = 0$ (*) وهي معادلة لوجندر

2 نفرض أن $x+1 = e^t \Rightarrow dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x+1}$ ومنه فإن

1 $(x+1)v' = D_t v$

1 $(x+1)^2 v'' = D_t(D_t - 1)v$

1 نعوض في المعادلة (*) فنجد أن $[D_t(D_t - 1) - 12]v = 0$

1 أي أن $[D_t^2 - D_t - 12]v = 0$ (**)

وهي معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة ومتجانسة المعادلة المميزة لها هي

2+2+3 $m^2 - m - 12 = 0$ جذرا هذه المعادلة هما $m_1 = 4 \wedge m_2 = -3$ وبالتالي فإن

3 الحل العام للمعادلة(**) هو $v = a_1 e^{4t} + a_2 e^{-3t}$ حيث a_1, a_2 ثوابت كيفية

4 وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة (*) هو $v = a_1(x+1)^4 + a_2 \frac{1}{(x+1)^3}$

6 ومنه فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو $y = c_1(x+1)^5 + c_2(x+1)^{-2} + c_3$

حيث $c_1 = \frac{a_1}{5} \wedge c_2 = \frac{a_2}{-2} \wedge c_3$ ثوابت كيفية .

****

جواب السؤال الثاني : المعادلة المعطاة هي $y'' - (\tan x - 2\cot x)y' + 2(\cot x)^2 y = 0$

(٣٠ درجة)

5 إن علاقة ليوفيل ـأوستراد سكي هي $y_h = y_1 [\int \frac{c_1 e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx + c_2]$

3 وبالتالي

$$y_h = \sin x \left[\int \frac{c_1 e^{-\int (\tan x - 2\cot x)dx}}{(\sin x)^2} dx + c_2 \right]$$

5 ولكن

$$-\int (\tan x - 2\cot x)dx = \ln \cos x . \sin^2 x$$

5 ومنه فإن

$$y_h = \sin x \left[\int c_1 \frac{\cos x . \sin^2 x}{\sin^2 x} dx + c_2 \right]$$

5 أي أن

$$y_h = \sin x [c_1 \int \cos x dx + c_2]$$

5 ومنه فإن

$$y_h = c_1 \sin^2 x + c_2 \sin x$$

****

جواب السؤال الثالث : المعادلة المعطاة هي (40 درجة)

$$x^2(1-\ln x)y'' + xy' - y = \frac{(1-\ln x)^2}{x}$$

2 المعادلة المتجانسة المناظرة هي $x^2(1-\ln x)y'' + xy' - y = 0$

2 تكون الدالة $y_1 = x$ حلاً" إذا وفقط إذا كان $p_1(x) + xp_0(x) = 0$

2 $x + x(-1) = 0$ أي لن العلاقة محققة وبالتالي . $y_1 = x$ هي حل خاص

2 وبالتالي فإن الحل العام هو

$$y_h = y_1 \left[\int \frac{c_1 e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx + c_2 \right]$$

3

$$y_h = x \left[\int \frac{c_1 e^{-\int \frac{dx}{x(1-\ln x)}}}{x^2} dx + c_2 \right]$$

5 ولكن $$e^{-\int \frac{dx}{x(1-\ln x)}} = 1-\ln x$$

2 أي أن $$y_h = x[c_1\int \frac{1-\ln x}{x^2}dx + c_2]$$

2 $$y_h = x[c_1\int\frac{dx}{x^2} - c_1\int\frac{\ln x}{x^2}dx + c_2]$$

2 $$y_h = x[-\frac{c_1}{x} - c_1\int te^{-t}dt + c_2]$$

1 $$y_h = x[-\frac{c_1}{x} - c_1(-te^{-t} - e^{-t}) + c_2]$$

1 ومنه فإن $$y_h = c_1\ln x + c_2 x$$

1 أي أن قاعدة الحلول هي $y_1 = x \wedge y_2 = \ln x$ وبالتالي فإن

1+1+1 $W(x,\ln x) = 1-\ln x$ و $W_1 = -\frac{\ln x.(1-\ln x)}{x^3}$ و $W_2 = \frac{1-\ln x}{x^2}$

1 وبما أن $$y_p = y_1\int\frac{W_1}{W}dx + y_2\int\frac{W_2}{W}dx$$

1+1 فإن $$y_p = x\int\frac{-\ln x(1-\ln x)}{x^3(1-\ln x)}dx + \ln x\int\frac{1-\ln x}{x^2(1-\ln x)}dx$$

1+1 $$y_p = -x\int\frac{\ln x}{x^3}dx + \ln x\int\frac{dx}{x^2}$$

1 بفرض أن $\ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$

ن ٧

نعوض في التكامل الأول فنجد

1 $$y_p = -x\int te^{-2t}dt + \ln x\,(-\frac{1}{x})$$

1 $$y_p = -x[-\frac{te^{-2t}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2t}] - \frac{\ln x}{x}$$

1 $$y_p = \frac{1-2\ln x}{4x}$$

وبما أنّ $y = y_h + y_p$ فإنّ الحل العام للمعادلة المعطاة هو

3 $$y = c_1x + c_2\ln x + \frac{1-2\ln x}{4x}$$

انتهت الأجابات

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

خاصة

جامعة البعث — معادلات تفاضلية /2/ — اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات — الفصل الثاني للعام الدراسي 2011-2012

السؤال الأول : (25درجة)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$x^3(1-\ln x)y''+x^2y'-xy=(1-\ln x)^2$$

السؤال الثاني : (25درجة)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$(1+x^2)^3y''+2x(1+x^2)^2y'+(1+x^2)y=3x$$

إذا علمت أنّ الدالة $y_1=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ حل خاص للمعادلة المتجانسة المناظرة.

السؤال الثالث : (25درجة)

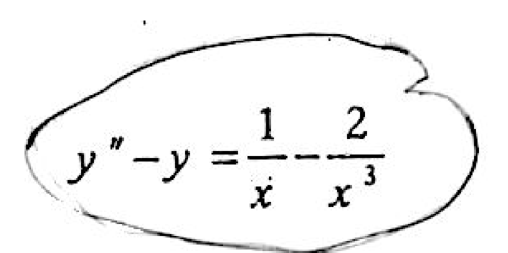
أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'+4y=0$$

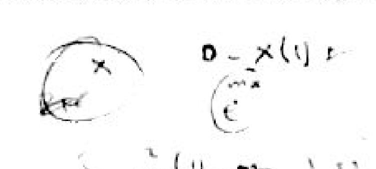
إذا علمت أنّ للمعادلة المتجانسة المناظرة حل خاص على هيئة كثير حدود .

السؤال الرابع : (25درجة)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية



$$y''-y=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}$$



أجمل الأمنيات بالنجاح

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الأول 25 درجة

المعادلة المعطاة تكتب بالشكل

$$y'' + \frac{1}{x(1-\ln x)} y' - \frac{1}{x^2(1-\ln x)} y = \frac{1-\ln x}{x^3}$$

• نكون الدالة $y_1 = x$ حلاً خاصاً للمعادلة المتجانسة المناظرة إذا وفقط إذا تحقق $P_1 + xP_0 = 0$

وبما أن

$$P_1 + xP_0 = \frac{1}{x(1-\ln x)} + x\left(-\frac{1}{x^2(1-\ln x)}\right) = \frac{1}{x(1-\ln x)} - \frac{1}{x(1-\ln x)} = 0$$

إذن $y_1 = x$ حل خاص للمعادلة المتجانسة المناظرة وبالتالي فإن الحل العام يكون

الطريقة الأولى: $y = y_1 v \Leftarrow y = xv \Leftarrow y' = v + xv' \Leftarrow 2v' + xv''$

نعوض في المعادلة المعطاة نجد

$$xv'' + 2v' + \frac{1}{x(1-\ln x)}(v + xv') - \frac{1}{x^2(1-\ln x)}(xv) = \frac{1-\ln x}{x^3}$$

أي أن

$$xv'' + \left(2 + \frac{1}{1-\ln x}\right)v' = \frac{1-\ln x}{x^3}$$

أي أن

1 $$v'' + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x(1-\ln x)}\right)v' = \frac{1-\ln x}{x^4}$$

وبفرض أن $u = v' \Leftarrow u' = v''$ فإن المعادلة السابقة تكون من الشكل

$$u' + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x(1-\ln x)}\right)u = \frac{1-\ln x}{x^4} \quad (*)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى عامل التكامل لها هو

2 $$\mu = e^{\int\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x(1-\ln x)}\right)dx} = e^{2\ln x - \ln(1-\ln x)} = \frac{x^2}{1-\ln x}$$

نضرب طرفي المعادلة (*) بـ μ نحصل على

1 $$\frac{x^2}{1-\ln x}u' + \left(\frac{2x}{1-\ln x} + \frac{2x}{x(1-\ln x)^2}\right)u = \frac{1}{x^2}$$

2+2 $$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{1-\ln x}u\right] = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2}{1-\ln x}\cdot u = -\frac{1}{x} + c_1$$

أي أن

1 $$u = -\frac{1-\ln x}{x^3} + c_1\frac{1-\ln x}{x^2}$$

أي أن

1 $$v' = -\frac{1-\ln x}{x^3} + c_1\frac{1-\ln x}{x^2}$$

اوصي ارتباط

$$v = -\int \frac{}{x^3} + \int \frac{\ln x}{x^3}\,dx + c_1\int \frac{dx}{x^2} - c_1\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx + c_2$$

$$v = \frac{1}{2x^2} + \int t\,e^{-2t}\,dt - \frac{c_1}{x} - c_1\int t\,e^{-t}\,dt + c_2$$

$$v = \frac{1}{2x^2} + \left[-\frac{1}{2}t\,e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right] - \frac{c_1}{x} - c_1\left[-t\,e^{-t} - e^{-t}\right] + c_2$$

$$v = \frac{1}{2x^2} + \left[-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{4x^2}\right] - \frac{c_1}{x} - c_1\left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right] + c_2$$

$$v = \frac{1}{2x^2} + \left[\frac{-2\ln x - 1}{4x^2}\right] + c_1\frac{\ln x}{x} + c_2$$

1 $$v = \frac{1 - 2\ln x}{4x^2} + c_1\frac{\ln x}{x} + c_2$$

وهذا يكون الحل العام هو

1 $$y = x\,v = x\left[c_2 + c_1\frac{\ln x}{x} + \frac{1 - 2\ln x}{4x^2}\right]$$

2 $$y = c_2 x + c_1 \ln x + \frac{1 - 2\ln x}{4x}$$

الطريقة الثانية بما أن $y_1 = x$ هو حل خاص للمعادلة المتجانسة المرافقة فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة المرافقة هو

3 $$y_h = y_1\left[\int \frac{c_1 e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx + c_2\right]$$

3 $$= x\left[\int \frac{c_1 e^{-\int \frac{1}{x(1-\ln x)}dx}}{x^2}\,dx + c_2\right]$$

3+2 $$= x\left[\int \frac{c_1 e^{\ln(1-\ln x)}}{x^2}\,dx + c_2\right] = x\left[c_1\int \frac{1-\ln x}{x^2}\,dx + c_2\right]$$

1 $$= x\left[c_1\int \frac{dx}{x^2} - c_1\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx + c_2\right] = x\left[-\frac{c_1}{x} - c_1\int t\,e^{-t}\,dt + c_2\right]$$

1 $$= x\left[-\frac{c_1}{x} - c_1\left(-t\,e^{-t} - e^{-t}\right) + c_2\right] = x\left[-\frac{c_1}{x} + \frac{c_1 \ln x}{x} + \frac{c_1}{x} + c_2\right]$$

$$y_h = x\left[c_1 \frac{\ln x}{x} + c_2\right] = c_1 \ln x + c_2 x$$ أيوات

أيوات تاره الحلول للمعادلة المتجانسة الأولى هي x ، $\ln x$

$$W(x, \ln x) = \begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 1 - \ln x$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \ln x \\ \frac{1-\ln x}{x^3} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = -\frac{(1-\ln x)\cdot \ln x}{x^3}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{1-\ln x}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

رشوانات

$$y_p = x \int -\frac{\ln x}{x^3}\,dx + \ln x \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= x \int -t e^{-2t}\,dt + \ln x \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln x}{x} + x\left(+\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t}\right)$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \frac{2\ln x}{4x} + \frac{1}{4x} = \frac{1-2\ln x}{4x}$$ صح فاني

رشوانات الحل العام

أيوات

$$y = y_h + y_p$$

2 $$y = c_1 x + c_2 \ln x + \frac{1-2\ln x}{4x}$$

.. جيلان لكن صح فانس

حل السؤال الثاني

نفرض أن $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, v \Rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, v + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, v'$

$$y'' = \frac{-(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + 3x^2\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^3}\, v - \frac{2x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, v' + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, v''$$

$$y'' = -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, v + \frac{3x^2}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}\, v - \frac{2x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, v' + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, v''$$

بالتعويض نجد أن

$$(1+x^2)^{\frac{5}{2}} v'' - 2x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} v' + 3x^2\sqrt{1+x^2}\, v - (1+x^2)^{\frac{3}{2}} v + 2x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} v' - 2x^2\sqrt{1+x^2}\, v + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} v = 3x$$

أي أن

$$(1+x^2)^{\frac{5}{2}} v'' + x^2\sqrt{1+x^2}\, v + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} v - (1+x^2)^{\frac{3}{2}} v = 3x$$

$$(1+x^2)^{\frac{5}{2}} v'' + \sqrt{1+x^2}\, v\,(x^2+1) - (1+x^2)^{\frac{3}{2}} v = 3x$$

$$(1+x^2)^{\frac{5}{2}} v'' + (1+x^2)^{\frac{3}{2}} v - (1+x^2)^{\frac{3}{2}} v = 3x$$

أي أن

$$(1+x^2)^{\frac{5}{2}} v'' = 3x \Rightarrow v'' = \frac{3x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$v'' = \frac{3}{2}\, \frac{2x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} \Rightarrow v' = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + c_1$$

$$v' = -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + c_1 \Rightarrow v = -\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + c_1 x + c_2$$

نفرض أن $x = \tan w \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 w}\, dw \quad , \quad 1+x^2 = \frac{1}{\cos^2 w}$

نعوض نجد أن

$$v = -\int \frac{\frac{1}{\cos^2 w}\, dw}{\frac{1}{\cos^3 w}} + c_1 x + c_2 = -\int \cos w\, dw + c_1 x + c_2$$

أي أن

$$v = -\sin w + c_1 x + c_2 \Rightarrow y = -\frac{x}{1+x^2} + c_1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c_2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

وبالعودة للفرض $x = \tan w \Rightarrow x\cos w = \sin w \Rightarrow \sin w = x\, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\tan \cos x$

$\frac{\sin}{\cos}$

جواب السؤال الثالث :

نفرض حلاً بالشكل

$(4x^2-4x+1)y'' - (4x+2)y' + 4y = 0$. المعادلة تأتي بالشكل

1 $y = x^n + B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \dots + B_2x^2 + B_1x + B_0$

1 $y' = nx^{n-1} + (n-1)B_{n-1}x^{n-2} + \dots + 2B_2x + B_1$

1 $y'' = n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)B_{n-2}x^{n-3} + \dots + 2B_2$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة

2 $4n(n-1)x^n + 4(n-1)(n-2)B_{n-2}x^{n-1} + \dots$
$-4nx^n - 4(n-1)B_{n-1}x^{n-1} - \dots - 2nx^{n-1} - \dots + 4x^n + 4B_{n-1}x^{n-1} + \dots = 0$

نرتب الحدود ونقارن

$[4n(n-1) - 4n + 4]x^n + \dots = 0$

بالمطابقة نجد أن

3 $4n(n-1) - 4n + 4 = 0 \Rightarrow 4(n^2 - 2n + 1) = 0$
$4(n-1)^2 = 0 \Rightarrow n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1$

أي أن

2 $y = x + B \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y'' = 0$

نفرض أن

نعوض في المعادلة المعطاة نجد أن

2 $(4x^2-4x+1)\cdot 0 - (4x+2)1 + 4(x+B) = 0$
$-2 + 4B = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

أي أن الدالة $y = x + \frac{1}{2}$ هو حل للمعادلة

2 . $y = 2x + 1$

نبحث عن حل خاص للمعادلة ... الحل العام يأخذ بالشكل

1 $y = y_1 v$

+1 $y = (2x+1)v \Rightarrow y' = 2v + (2x+1)v' \Rightarrow y'' = 4v' + (2x+1)v''$

نعوض في المعادلة المعطاة نجد أن

2 $(2x+1)^3v'' + 4(2x+1)^2v' - 2(2x+1)(2x+1)v' - 4(2x+1)v + 4(2x+1)v = 0$
$(2x+1)^3v'' + 2(2x+1)^2v' = 0 \Rightarrow \frac{v''}{v'} = -\frac{2}{2x+1} \Rightarrow$

2. $\ln\frac{v'}{c_1} = -\int\frac{2}{2x+1}dx \Rightarrow \ln\frac{v'}{c_1} = -\ln(2x+1) \Rightarrow \frac{v'}{c_1} = \frac{1}{2x+1} \Rightarrow$

1 $v' = \frac{c_1}{2x+1} \Rightarrow v = \frac{c_1}{2}\ln(2x+1) + c_2$

1 $v = c_0\ln(2x+1) + c_2$

أي أن $c_0 = \frac{c_1}{2}$ حيث

1 $y = (2x+1)[c_0\ln(2x+1) + c_2]$ وهذا هو الحل العام للمعادلة المعطاة

1 $= c_2(2x+1) + c_0(2x+1)\ln(2x+1)$

والحمد لله .

سؤال رابع: **25** مجموع ...

المعادلة المتجانسة المرافقة هي $y''-y=0$

3 المعادلة المميزة لها هي $m^2-1=0$ ، $m_1=1$ ، $m_2=-1$

2 وبالتالي فإن قاعدة الحلول لهذه المعادلة هي $y_1=e^{x}$ ، $y_2=e^{-x}$

2 أي أن الحل العام للمتجانسة المرافقة هو $y_h=A_1e^{x}+A_2e^{-x}$

1 $$W(e^{x},e^{-x})=\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x}\end{vmatrix}=-1-1=-2$$

1+1 $$W_1=\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \frac{1}{x}-\frac{2}{x^3} & -e^{-x}\end{vmatrix}=\left(\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x}\right)e^{-x},\quad W_2=\begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & \frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}\right)e^{x}$$

ونستطيع إيجاد الحل الخاص بالصيغة

1+1+1 $$y_p=y_1\int\frac{W_1}{W}dx+y_2\int\frac{W_2}{W}dx=\frac{e^{x}}{-2}\int\left(\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx-\frac{e^{-x}}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}\right)e^{x}dx$$

2 $$=-\frac{e^{x}}{2}\int\frac{2}{x^3}e^{-x}dx+\frac{e^{x}}{2}\int\frac{e^{-x}}{x}dx-\frac{e^{-x}}{2}\int\frac{e^{x}}{x}dx+e^{-x}\int\frac{e^{x}}{x^3}dx$$

$$=-e^{x}\int\frac{e^{-x}}{x^3}dx+\frac{e^{x}}{2}\int\frac{e^{-x}}{x}dx-\frac{e^{-x}}{2}\int\frac{e^{x}}{x}dx+e^{-x}\int\frac{e^{x}}{x^3}dx$$

2 $$=-e^{x}\int\frac{e^{-x}}{x^3}dx+\frac{e^{x}}{2}\left[-\frac{e^{-x}}{x}-\int\frac{e^{-x}}{x^2}dx\right]-\frac{e^{-x}}{2}\left[\frac{e^{x}}{x}+\int\frac{e^{x}}{x^2}dx\right]+e^{-x}\int\frac{e^{x}}{x^3}dx$$

2 $$=-e^{x}\int\frac{e^{-x}}{x^3}dx-\frac{1}{2x}-\frac{e^{x}}{2}\left[\frac{1}{x^2}(-e^{-x})-\int\frac{2e^{-x}}{x^3}dx\right]-\frac{1}{2x}-\frac{e^{-x}}{2}\int\frac{e^{x}}{x^2}dx+e^{-x}\int\frac{e^{x}}{x^3}d$$

2 $$=-e^{x}\int\frac{e^{-x}}{x^3}dx-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}+e^{x}\int\frac{e^{-x}}{x^3}dx-\frac{1}{2x}-\frac{e^{-x}}{2}\left[\frac{e^{x}}{x^2}+\int\frac{2e^{x}}{x^3}dx\right]+e^{-x}\int\frac{e^{x}}{x^3}$$

2 $$=-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x^2}-e^{-x}\int\frac{e^{x}}{x^3}dx+e^{-x}\int\frac{e^{x}}{x^3}dx=-\frac{1}{x}$$

$$y_p=-\frac{1}{x}$$

أي أن

ونحصل على الحل العام

2 $y=A_1e^{x}+A_2e^{-x}-\frac{1}{x}$ أي أن $y=y_h+y_p$

حل المسألة

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

د. ...